ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

1981 **MATHÉMATIQUES** OPTION TA

2ème ÉPREUVE (Durée: 4 h)

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on note : $\vec{AB}.\vec{CD}$ le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.

AB la distance du point A au point B déduite du produit scalaire.

On notera par C_k le cercle de centre Ω_k de coordonnées (x_k, y_k) et de rayon R_k.

Etant donnés deux cercles C_1 et C_2 de rayons non nuls, on dit que C_1 et C_2 sont orthogonaux si et seulement si $D^2 = R_1^2 + R_2^2$ où $D = \Omega_1 \Omega_2$ est la distance des centres.

I - 1°) Démontrer simplement que deux cercles orthogonaux sont nécessairement sécants en deux points distincts.

2°) Soient A et B les points d'intersection de deux cercles C_1 et C_2 supposés sécants.

On appelle D_1 la droite tangente en A au cercle C_1 et D_2 la droite tangente en A au cercle C_2 ;

Démontrer géométriquement que C_1 et C_2 sont orthogonaux si et seulement si les tangentes D_1 et D_2 sont orthogonales.

3°) Soient P un point du plan $\mathcal{P}$ et C un cercle de centre Ω et de rayon R non nul. On appelle M et N les points d'intersection d'une droite D passant par P avec C.

Démontrer que $\vec{PM}.\vec{PN} = d^2 - R^2$ où d désigne la distance de P à Ω.

4°) On considère le cercle C_1 d'équation $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ et le cercle C_2 d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Déterminer l'ensemble des cercles C orthogonaux simultanément à C_1 et à C_2.

On représentera les cercles C_1, C_2 et un cercle C sur une figure en prenant 1 cm pour unité.

5°) a - On considère les cercles C_1 d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 7$ et C_2 d'équation $(x + 1)^2 + y^2 = 4$.

Déterminer l'ensemble des cercles C orthogonaux simultanément à C_1 et à C_2 ; on précisera l'ensemble des centres de ces cercles et on fera une figure.

b - On considère les cercles C_1 d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ et C_2 d'équation $(x + 3)^2 + y^2 = 6$.

Déterminer l'ensemble des cercles C orthogonaux simultanément à C_1 et à C_2. On fera une figure.

.../...

Démontrer que tous les cercles C orthogonaux à C_1 et à C_2 passent par deux points fixes.

II - Soit V = (a, b, c, d) un élément de $\mathbb{R}^4$. A cet élément V de $\mathbb{R}^4$ on associe l'ensemble C(V) des points du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x,y) telles que

$$a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$$

$$C(V) = \{ (x,y) \mid (x,y) \in \mathcal{P} : \quad a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0 \}$$

1°) A quelles conditions sur V, l'ensemble C(V) de $\mathcal{P}$ est-il :

a - le plan $\mathcal{P}$ en entier ?

b - l'ensemble vide ?

c - un point ?

d - une droite ?

e - un cercle ?

Dans ce dernier cas :

. Préciser le centre et le rayon de ce cercle.

. Si $C(V_1)$ et $C(V_2)$ sont des cercles de rayons strictement positifs, à quelle condition sur V_1 et V_2 ces cercles sont-ils confondus ?

2°) Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(V_1, V_2) = b_1 b_2 + c_1 c_2 - \frac{1}{2}(a_1 d_2 + a_2 d_1)$$

avec : $V_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $V_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$.

Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^4$.

Montrer que C(V) est un cercle de rayon non nul si et seulement si $a \neq 0$ et si $\phi(V,V) > 0$. Exprimer dans ce cas le rayon de C(V) en fonction de $\phi(V,V)$ et de a.

3°) Soient deux éléments V_1 et V_2 de $\mathbb{R}^4$ tels que $C(V_1)$ et $C(V_2)$ sont des cercles de rayons strictement positifs R_1 et R_2. Exprimer $\frac{\phi(V_1, V_2)}{a_1 a_2}$ en fonction de $R_1^2 + R_2^2 - D^2$.

Préciser la valeur prise par $\frac{\phi(V_1, V_2)}{a_1 a_2}$ lorsque :

. les cercles $C(V_1)$ et $C(V_2)$ sont tangents intérieurement.

. les cercles $C(V_1)$ et $C(V_2)$ sont tangents extérieurement.

. les cercles $C(V_1)$ et $C(V_2)$ sont concentriques.

4°) Montrer que si à V_1 et V_2 correspondent deux cercles $C(V_1)$ et $C(V_2)$ de rayon strictement positif, pour que $C(V_1)$ et $C(V_2)$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que $\phi(V_1, V_2)$ soit nul.

5°) Soit C_1 le cercle de centre $(\alpha, 0)$ de rayon R_1 et C_2 le cercle de centre $(\beta, 0)$ de rayon R_2 ; on suppose : $\alpha^2 - R_1^2 = \beta^2 - R_2^2$

α, β, 0 sont supposés deux à deux distincts.

Déterminer les cercles C orthogonaux à C_1 et à C_2 en utilisant la forme bilinéaire ϕ. Préciser l'ensemble de ces cercles.

Envisager le cas où $R_1 = |\alpha|$ et $R_2 = |\beta|$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail